

**ΤΑΞΗ: Β΄ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ**  
**ΜΑΘΗΜΑ: ΑΛΓΕΒΡΑ / ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ**

**Ημερομηνία: Κυριακή 7 Απριλίου 2013**

**Διάρκεια Εξέτασης: 2 ώρες**

**ΕΚΦΩΝΗΣΕΙΣ**

**ΘΕΜΑ Α**

**A.1.** Να αποδείξετε ότι αν  $a > 0$  με  $a \neq 1$  τότε για κάθε  $\theta_1, \theta_2 > 0$  ισχύει  
 $\log_a(\theta_1 \cdot \theta_2) = \log_a \theta_1 + \log_a \theta_2$

**Μονάδες 9**

**A.2. α)** Πότε μια συνάρτηση με πεδίο ορισμού ένα σύνολο  $A$  λέγεται άρτια;

**Μονάδες 3**

**β)** Πότε μια συνάρτηση με πεδίο ορισμού ένα σύνολο  $A$  λέγεται περιοδική;

**Μονάδες 3**

**A.3.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας το γράμμα κάθε πρότασης και δίπλα τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

**α)** Ο βαθμός του γινομένου δύο μη μηδενικών πολυωνύμων είναι ίσος με το άθροισμα των βαθμών των πολυωνύμων αυτών.

**Μονάδες 2**

**β)** Αν  $a > 0$  με  $a \neq 1$  και  $\theta > 0$  τότε  $a^x = \theta \Leftrightarrow x = \log_a \theta$

**Μονάδες 2**

**γ)** Η συνάρτηση  $f(x) = e^{\eta x}$  έχει πεδίο ορισμού της το σύνολο  $\mathbb{R}_1 = \{x \mid \eta \mu x \neq 0\}$

**Μονάδες 2**

**δ)** Η γραφική παράσταση της συνάρτησης  $f$  με  $f(x) = \varphi(x+c)$  όπου  $c > 0$ , προκύπτει από μια οριζόντια μετατόπιση της γραφικής παράστασης της  $\varphi$  κατά  $c$  μονάδες προς τα δεξιά.

**Μονάδες 2**

**ε)** Η συνάρτηση  $f(x) = a^x$  με  $0 < a < 1$  είναι γνησίως φθίνουσα στο  $\mathbb{R}$ .

**Μονάδες 2**

**ΘΕΜΑ Β**

Έστω το πολυώνυμο  $P(x) = 2x^3 + (\alpha + \beta)x^2 + (2\alpha + 5\beta)x + 3$  με  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ .

**B.1.** Να βρείτε τις τιμές των  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  έτσι ώστε το  $x+1$  να είναι παράγοντας του  $P(x)$  και το υπόλοιπο της διαίρεσης  $P(x) : (x - 2)$  να ισούται με  $-9$

**Μονάδες 8**

**B.2.** Για  $\alpha = -7$  και  $\beta = 2$ :

**α)** Να λύσετε την εξίσωση  $P(x) = 0$

**Μονάδες 5**

**β)** Να κάνετε τη διαίρεση  $P(x) : (x^2 - 1)$  και να γράψετε την ταυτότητα της διαίρεσης.

**Μονάδες 6**

**γ)** Αν  $v(x)$  το υπόλοιπο της προηγούμενης διαίρεσης να λύσετε την ανίσωση  $\frac{v(x)}{P(x)} \geq 0$

**Μονάδες 6**

**ΘΕΜΑ Γ**

Δίνεται το σύστημα 
$$\begin{cases} \eta\mu(\pi + \theta)x + \sigma\upsilon\nu(-\theta)y = 1 \\ \eta\mu\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)x - \eta\mu(\theta - \pi)y = 1 \end{cases}, \theta \in \mathbb{R}.$$

**Γ.1.** Να δείξετε ότι το σύστημα έχει μοναδική λύση την  $(x, y) = (\sigma\upsilon\nu\theta - \eta\mu\theta, \eta\mu\theta + \sigma\upsilon\nu\theta)$ ,  $\theta \in \mathbb{R}$ .

**Μονάδες 12**

**Γ.2.** Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = (10^a - 3)\sigma\upsilon\nu x - 4$ ,  $a \in \mathbb{R}$ .

**α)** Να βρείτε την τιμή του  $a$  για την οποία η συνάρτηση έχει μέγιστη τιμή το 3

**Μονάδες 6**

**β)** Για  $a = 1$ , να βρείτε τις τιμές του  $\theta \in \mathbb{R}$  για τις οποίες  $xy = f(\theta)$  όπου  $(x, y)$  είναι η μοναδική λύση του συστήματος.

**Μονάδες 7**

**ΘΕΜΑ Δ**

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \frac{[\ln(e^x - e^2)]^2 - 3}{\ln(e^x - e^2) - 2}$

**Δ.1.** Να συγκρίνετε τους αριθμούς  $\ln(2e^2)$ ,  $\ln(e^3 + e^2)$ , 2 και να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης.

**Μονάδες 7**

**Δ.2.** Να λύσετε την ανίσωση  $\frac{y^2 - 3}{y - 2} \geq 6$

**Μονάδες 5**

**Δ.3.** Έστω  $x_0 = \ln(e^3 + e^2)$ :

**α)** Να αποδείξετε ότι  $f(x_0) = 6$

**Μονάδες 5**

**β)** Να αποδείξετε ότι  $f(x) \geq f(x_0)$  για κάθε  $x \in (\ln(2e^2), +\infty)$ . (μονάδες 5)

Είναι το  $f(x_0)$  ελάχιστο της συνάρτησης; (μονάδες 3)

**Μονάδες 8**